AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Elementów Maszyn

Wykład Nr 2

Rozciąganie/ściskanie mimośrodowe. Zginanie ukośne

studium przypadków; zginanie proste z rozciąganiem/ściskaniem; zginanie skośne; zginanie skośne z rozciąganiem/ściskaniem – funkcje naprężeń, warunki bezpieczeństwa, równanie osi obojętnej, wpływ orientacji przekroju na wartość naprężeń maksymalnych, przykłady obliczeniowe.

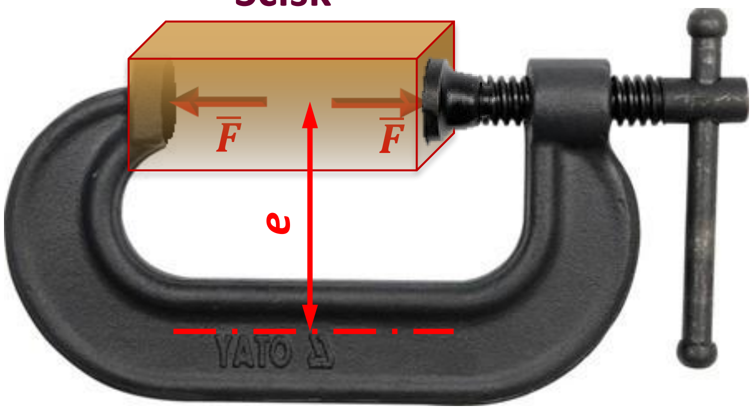
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

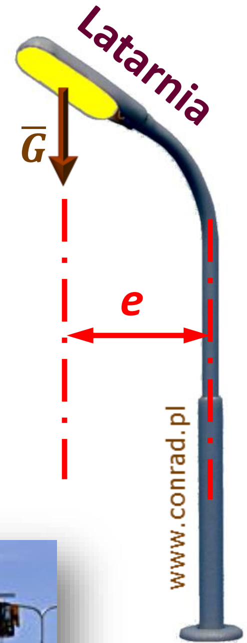
dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

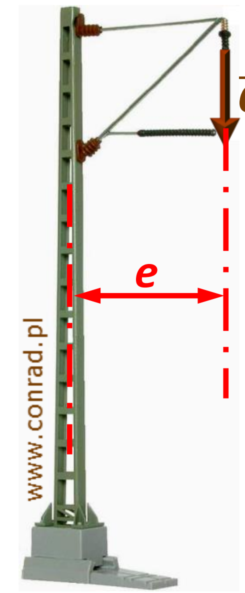
2.1. Rozciąganie/ściskanie mimośrodowe – przykładowe problemy inżynierskie

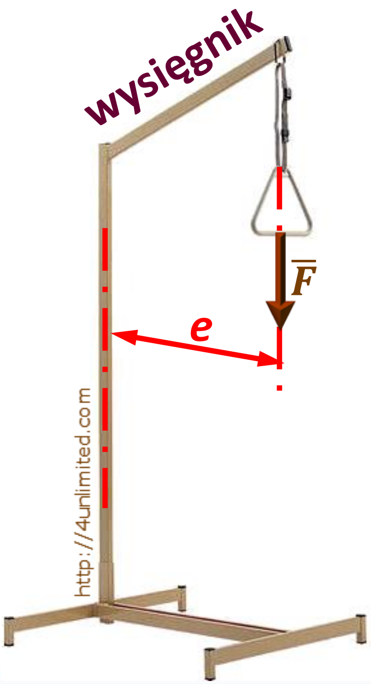
Ścisk

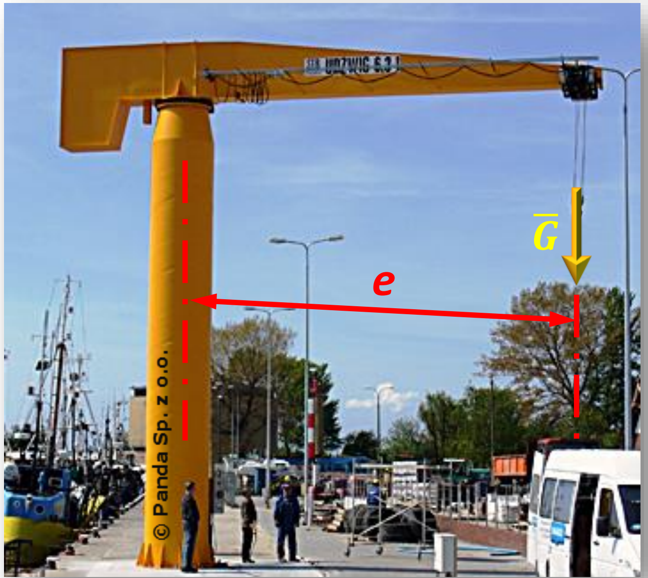




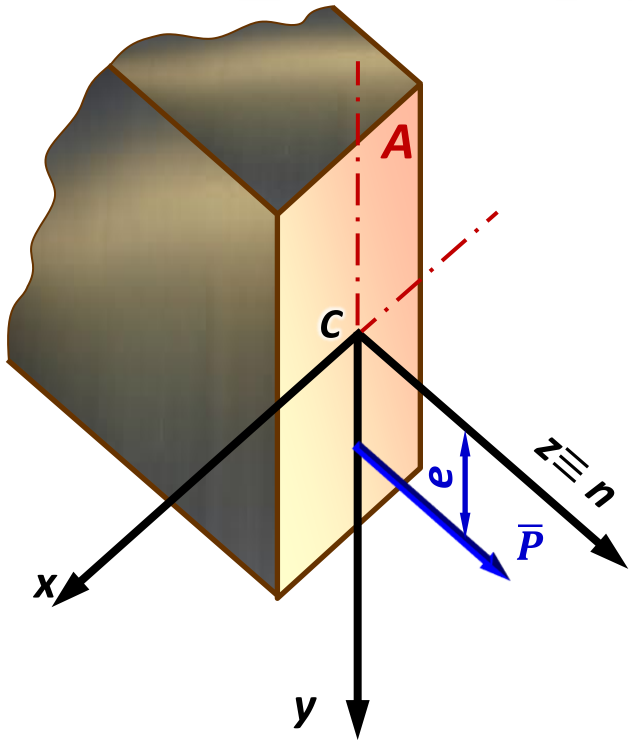
Słup trakcyjny

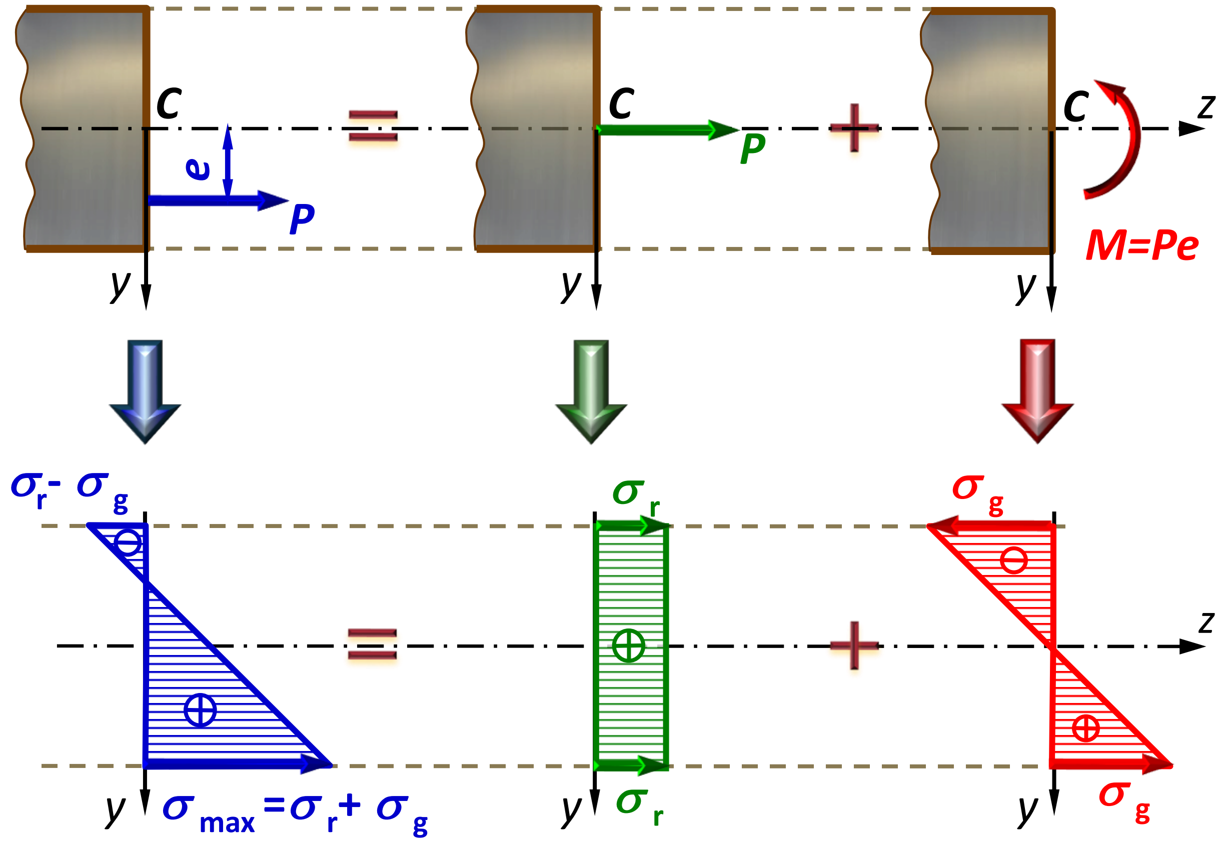






2.2. Naprężenia wypadkowe przy rozciąganiu/ściskaniu mimośrodowym





$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_g}$$

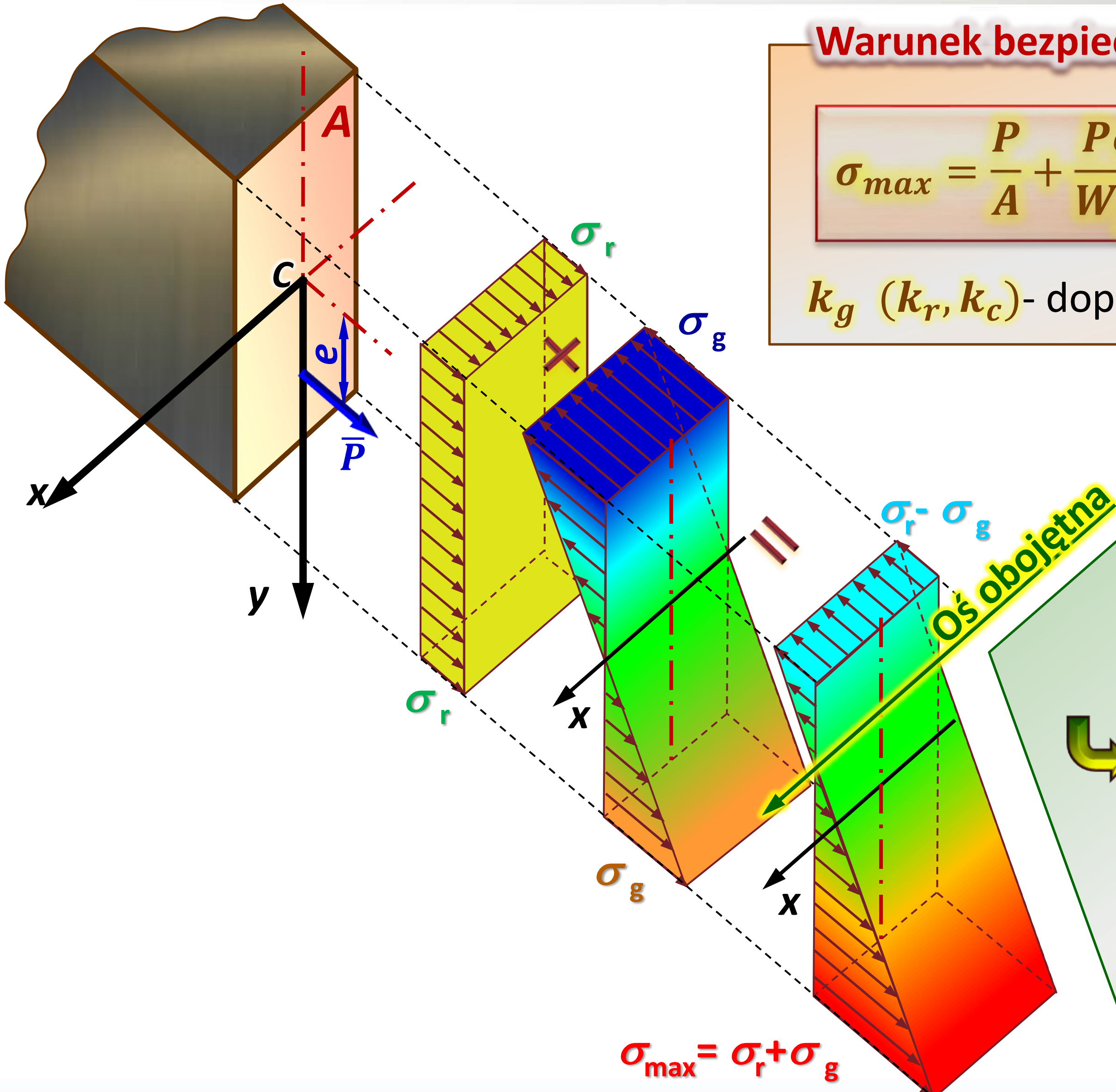
P - siła osiowa

A - pole przekroju

e - mimośród (…, **mm**, cm, ..)

W_g - wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie

2.3. Rozciąganie/ściskanie mimośrodowe - warunek bezpieczeństwa i równanie osi obojętnej



Warunek bezpieczeństwa:

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_g} \le k_g \ \ (k_r, k_c)}$$

$k_g \ (k_r, k_c)$- dopuszczalne naprężenia normalne

Równanie osi obojętnej:

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{J_x} y = 0$$

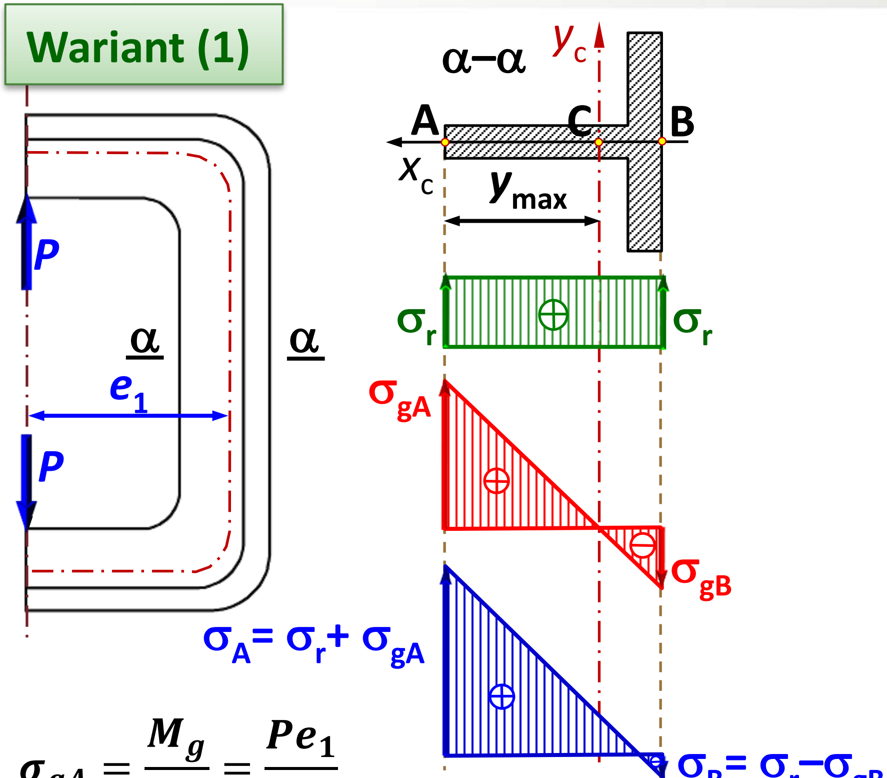
$$y = -\frac{P}{A} \cdot \frac{J_x}{Pe} = -\underbrace{\boxed{\frac{J_x}{A}}}_{i_x^2} \cdot \frac{1}{e}$$

$$\boxed{y = -\frac{i_x^2}{e}}$$

i_x - promień bezwładności

2.4. Rozciąganie/ściskanie mimośrodowe - wpływ orientacji przekroju na wartość naprężeń maksymalnych

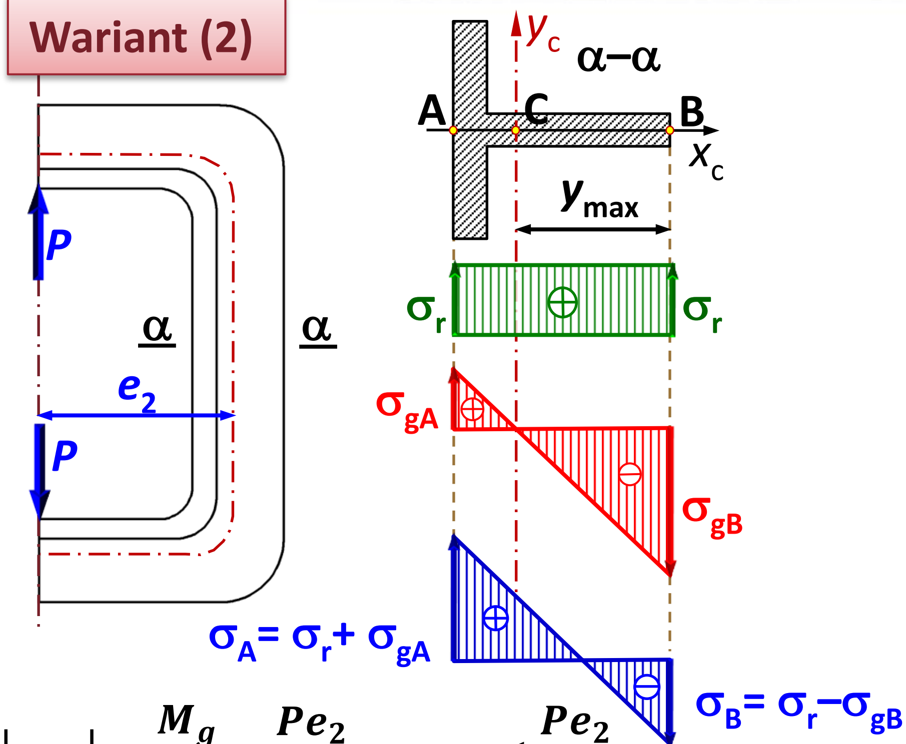
Wariant (1)



$$\sigma_{gA} = \frac{M_g}{W_g} = \frac{Pe_1}{W_g}$$

$$\sigma_{max(1)} = \sigma_A = \frac{|M_g|}{|W_g|} + \frac{|P|}{A}$$

Wariant (2)



$$|\sigma_{gB}| = \frac{M_g}{W_g} = \frac{Pe_2}{W_g} \qquad \sigma_{gA} < \frac{Pe_2}{W_g}$$

$$\sigma_{max(2)} < \frac{|M_g|}{|W_g|} + \frac{|P|}{A}$$

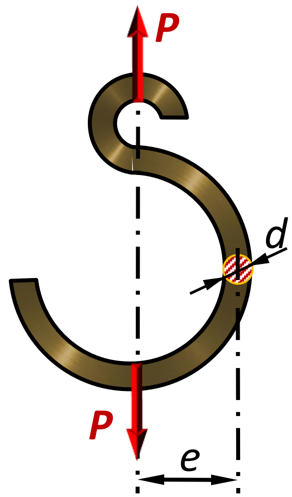
Wariant (2) korzystniejszy

(tym bardziej, jeżeli: $e_1 > e_2 \Rightarrow M_{g(1)} > M_{g(2)} \Rightarrow \sigma_{gA(1)} > |\sigma_{gB(2)}|$)

2.5. Rozciąganie/ściskanie mimośrodowe - przykłady obliczeniowe

Przykład 2.1:

Wyznaczyć średnice pręta z którego wykonany ma być hak jak na rysunku, o udźwigu ***P*=3 kN**, jeżeli naprężenia dopuszczalne **k_g = 120 MPa**.



Dane:

P= 3 kN, k_g=120 MPa, *e*=55 mm

Szukane:

d=?

Warunek bezpieczeństwa na rozciąganie mimośrodowe:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_g} \le k_g$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \qquad W_g = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32Pe}{\pi d^3} \le k_g$$

Wstępny dobór średnicy z uwzględnieniem samego zginania:

$$\sigma_g = \frac{32Pe}{\pi d^3} \le k_g \quad \Rightarrow \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{32Pe}{\pi k_g}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3000 \cdot 55}{\pi \cdot 120}} = 24.1 \ mm$$

Wstępnie przyjęta średnica: *d*= 25 mm

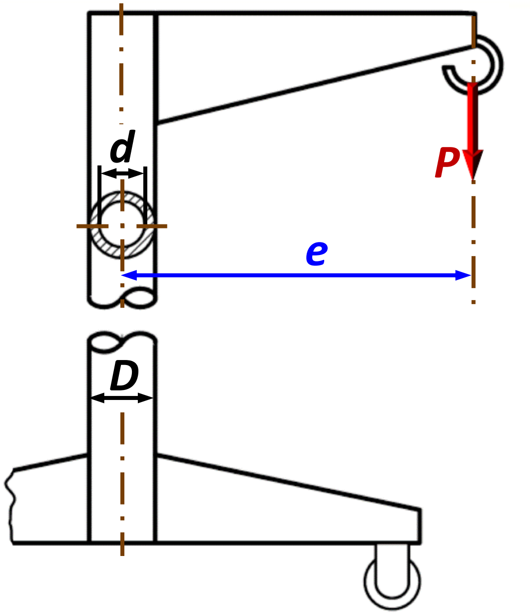
Sprawdzenia warunku bezpieczeństwa z uwzględnieniem rozciągania:

$$\sigma_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32Pe}{\pi d^3} = \frac{4 \cdot 3000}{\pi \cdot 25^2} + \frac{32 \cdot 3000 \cdot 55}{\pi \cdot 25^3} = 113.73 < k_g = 120 \ \ MPa$$

Warunek bezpieczeństwa spełniony ⇒ średnica *d*= 25 mm jest wystarczająca.

Przykład 2.2:

Jaki ciężar można podwiesić na stojaku jak na rysunku.



Dane:

k_g=120 MPa, e=500 mm, D=20 mm, d=16 mm

Szukane:

P=?

$$J_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

$$W_g = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{2 \cdot J_x}{D} \Rightarrow W_g = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$$

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

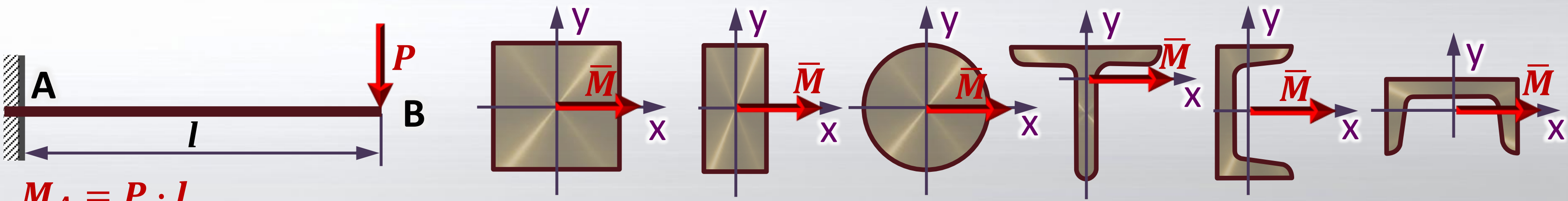
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_g} \le k_g \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} + \frac{32PDe}{\pi(D^4 - d^4)} \le k_g}$$

$$P \le \frac{k_g}{\frac{4}{\pi(D^2 - d^2)} + \frac{32De}{\pi(D^4 - d^4)}} = \frac{120}{\frac{4}{\pi(20^2 - 16)} + \frac{32 \cdot 20 \cdot 500}{\pi(20^4 - 16^4)}}$$

$$\boxed{P \le 92 \quad N}$$

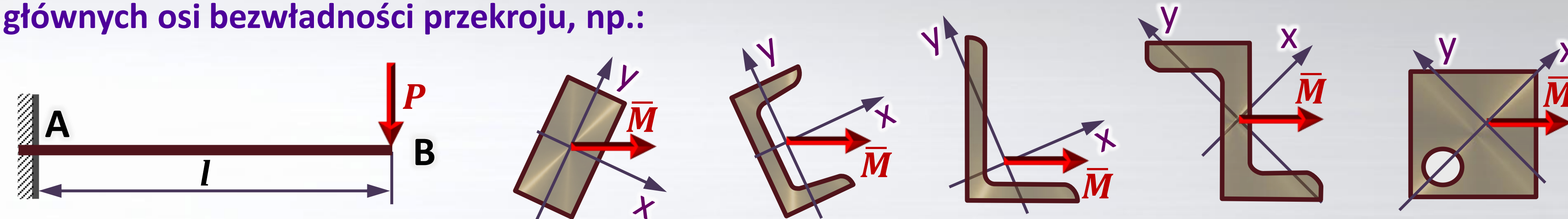
2.6. Zginanie ukośne – studium przypadków

Zginanie proste – kierunek wypadkowego wektora momentu zginającego pokrywa się z jedną z głównych osi bezwładności przekroju, np.:

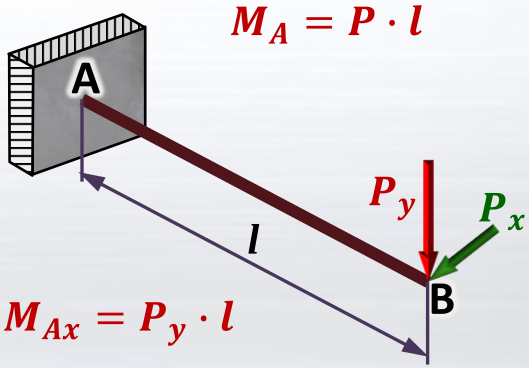


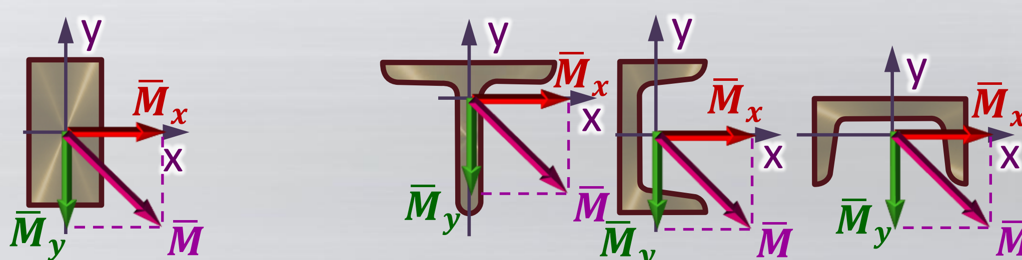
$$M_A = P \cdot l$$

Zginanie skośne – kierunek wypadkowego wektora momentu zginającego **nie** pokrywa się z **żadną** z głównych osi bezwładności przekroju, np.:



$$M_A = P \cdot l$$

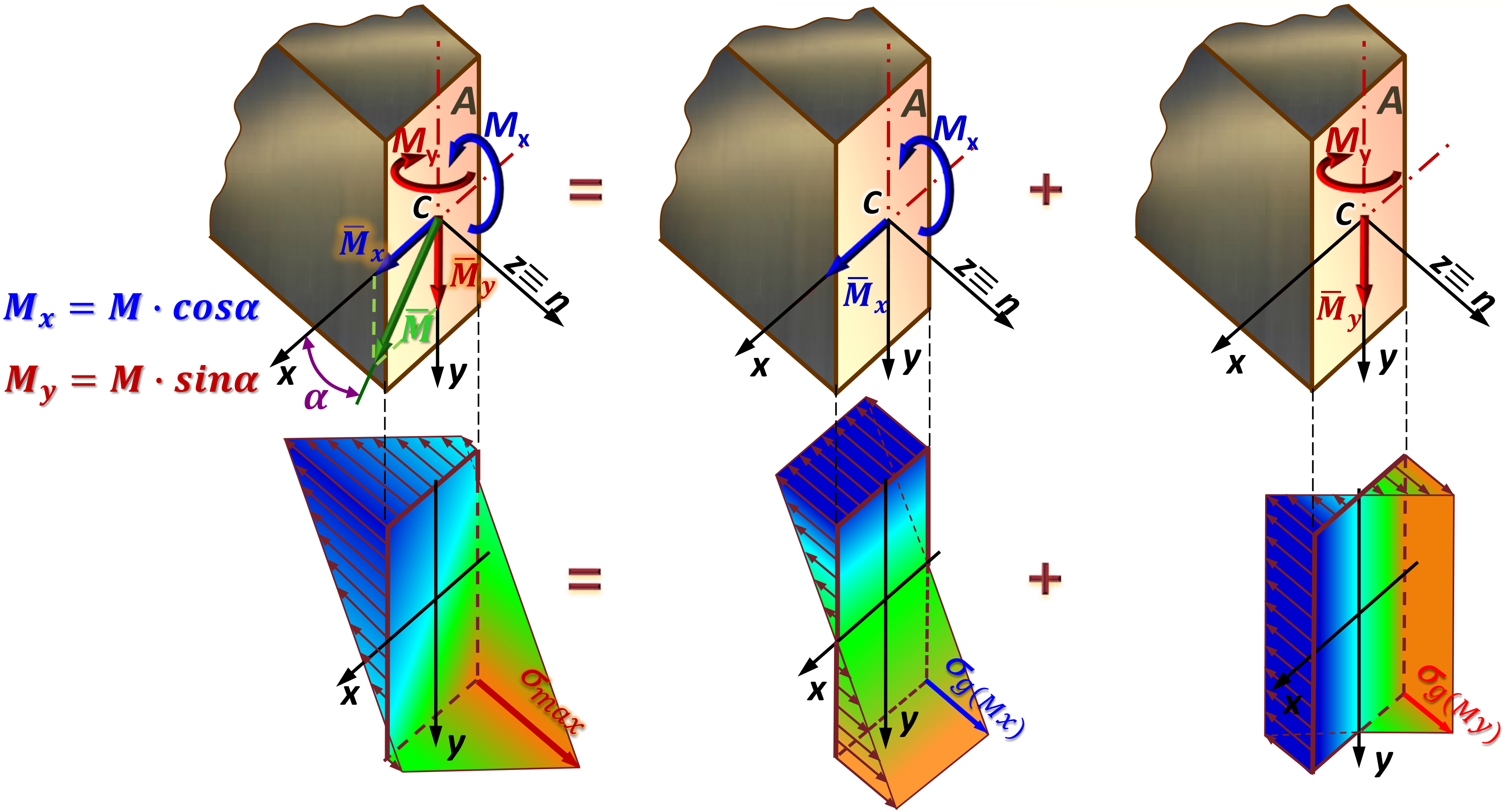




$$M_{Ax} = P_y \cdot l$$

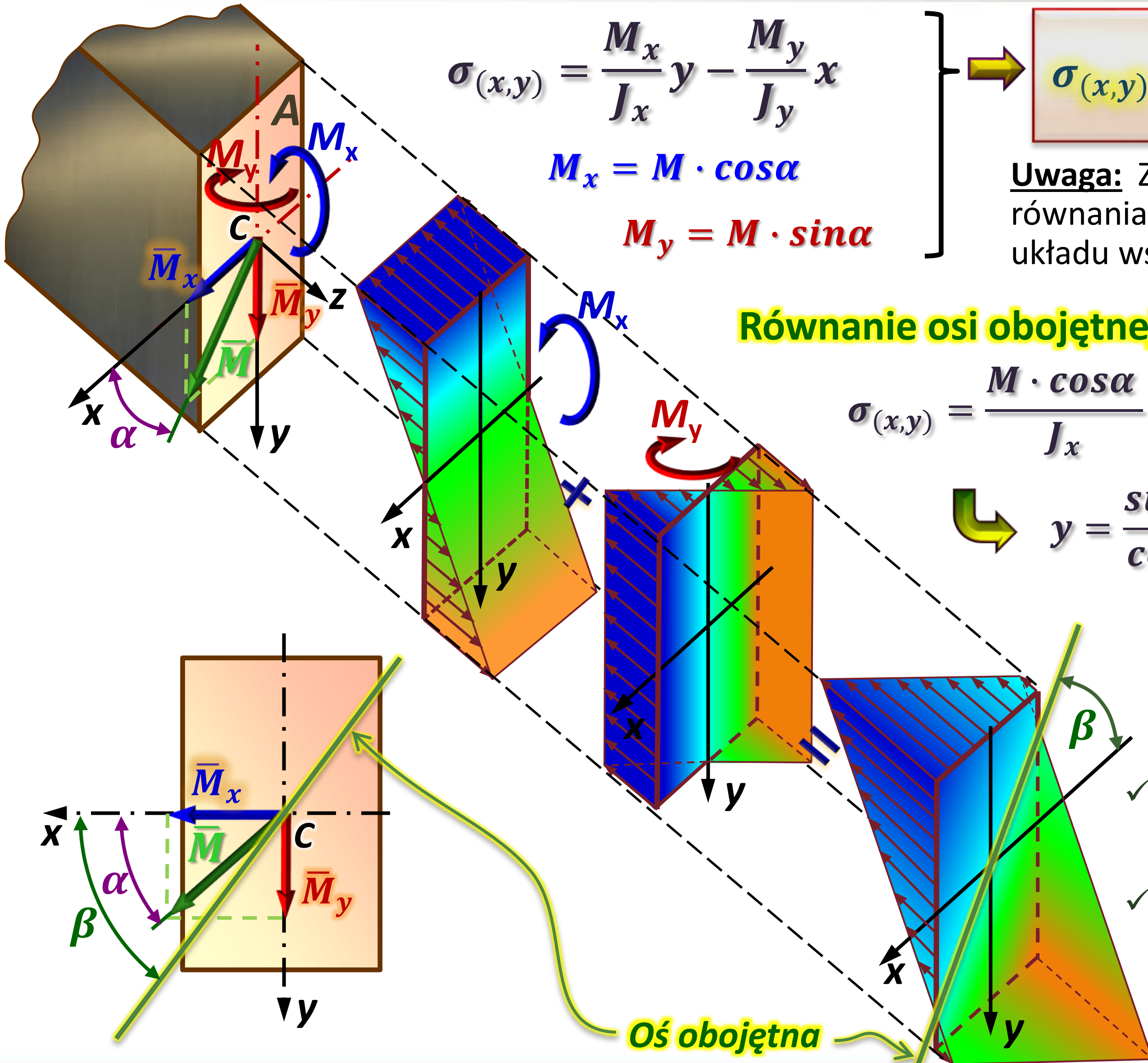
$$M_{Ay} = P_x \cdot l$$

2.7. Zginanie ukośne – naprężenia wypadkowe



$$\sigma_{(x,y)} = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y}(-x)$$

2.8. Zginanie ukośne – równanie osi obojętnej



$$\sigma_{(x,y)} = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

$$M_x = M \cdot \cos\alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin\alpha$$

$$\boxed{\sigma_{(x,y)} = \frac{M \cdot \cos\alpha}{J_x} y - \frac{M \cdot \sin\alpha}{J_y} x}$$

Uwaga: Znaki przy obu członach powyższego równania zależą od przyjętych zwrotów osi układu współrzędnych.

Równanie osi obojętnej:

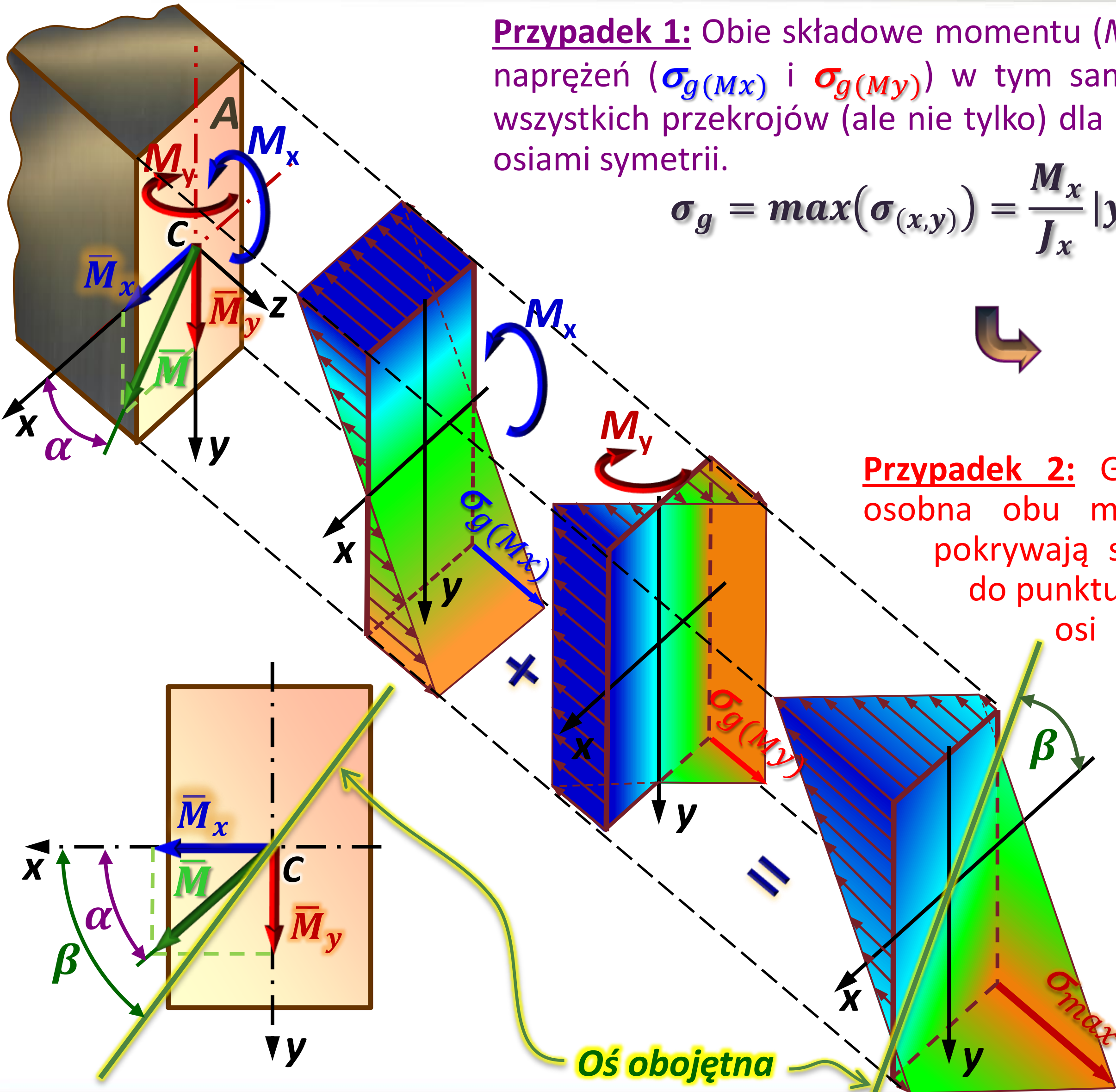
$$\sigma_{(x,y)} = \frac{M \cdot \cos\alpha}{J_x} y - \frac{M \cdot \sin\alpha}{J_y} x = 0$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{J_x}{J_y} x \Rightarrow \boxed{y = \frac{J_x}{J_y} \tan\alpha \cdot x}$$

$$\boxed{\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{J_x}{J_y} \tan\alpha}$$

- ✓ **Oś obojętna przy zginaniu ukośnym przechodzi przez środek ciężkości figury.**
- ✓ **Jeżeli $J_x = J_y$, oś obojętna pokrywa się z kierunkiem momentu gnącego ($\alpha = \beta$), tzn. nie występuje zginanie ukośne (dotyczy to wszystkich przekrojów o więcej niż dwóch osiach symetrii).**

2.9. Zginanie ukośne – warunek bezpieczeństwa



Przypadek 1: Obie składowe momentu (M_x i M_y) powodują powstanie największych naprężeń ($\sigma_{g(Mx)}$ i $\sigma_{g(My)}$) w tym samym punkcie. Dotyczy to w szczególności wszystkich przekrojów (ale nie tylko) dla których osie główne (x i y) pokrywają się z osiami symetrii.

$$\sigma_g = max(\sigma_{(x,y)}) = \frac{M_x}{J_x}|y_{max}| + \frac{M_y}{J_y}|x_{max}|$$

$$\sigma_g = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq k_g \ (k_r, k_c)$$

Przypadek 2: Gdy punkty krytyczne odpowiadające z osobna obu momentom składowym (M_x i M_y) nie pokrywają się, warunek bezpieczeństwa odnosi się do punktu przekroju najbardziej oddalonego od osi obojętnej, w którym występują największe wartości naprężeń wypadkowych:

$$\sigma_{gmax} = max|\sigma_{(x,y)}| =$$

$$= max\left|\frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x\right| \leq k_g \ (k_r, k_c)$$

Przykład 2.3:

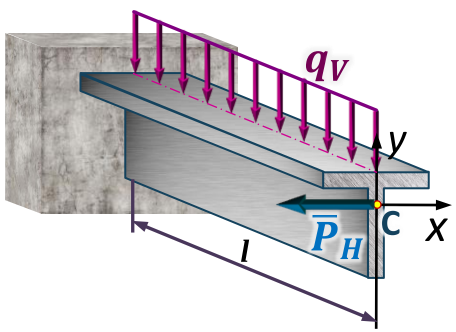
Dobrać wymiary przekroju poprzecznego belki jak na rysunku.

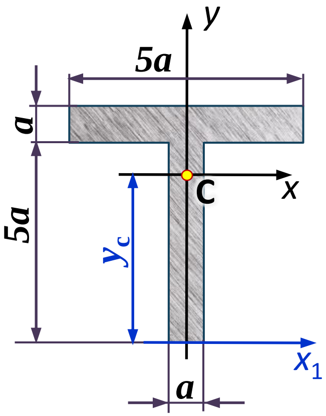
Dane:

q_v= 3 kN/m, P_H=2 kN, l=1 m, k_g=120 MPa,

Szukane:

a=?





1. Momenty gnące w przekroju niebezpiecznym (przekroju utwierdzenia)

$$M_{gx} = q_v \frac{l^2}{2} = 3\frac{1^2}{2} = 1.5\ kNm$$

$$M_{gy} = P_H l = 2 \cdot 1 = 2\ kNm$$

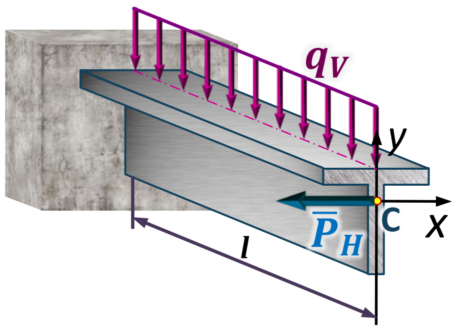
2. Główne centralne momenty bezwładności:

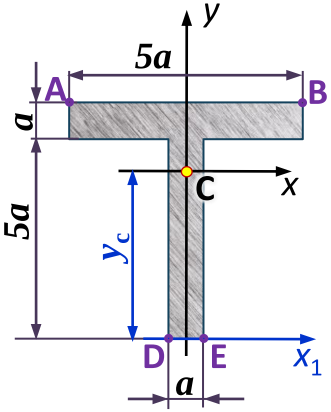
$$y_C = \frac{S_{x1}}{A} = \frac{5a \cdot a \cdot 2.5a + 5a \cdot a \cdot 5.5a}{5a^2 + 5a^2} = 4a$$

$$J_x = \frac{5a \cdot a^3}{12} + 5a \cdot a \cdot (1,5a)^2 + \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + 5a \cdot a \cdot (1,5a)^2 = 33.33(3)a^4$$

$$J_y = \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + \frac{5a \cdot a^3}{12} = 10.83(3)a^4$$

Przykład 2.3: Dane: q_v= 3 kN/m, P_H=2 kN, l=1 m, k_g=120 MPa, Szukane: a=?





$$M_{gx} = 1.5\ kNm \qquad M_{gy} = 2\ kNm$$

$$y_C = 4a \quad J_x = 33.33(3)a^4 \quad J_y = 10.83(3)a^4$$

3. Zależność na naprężenia w przekroju utwierdzenia:

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{M_{gx}}{J_x} y + \frac{M_{gy}}{J_y} x$$

4. Warunek bezpieczeństwa – dobór wymiaru przekroju belki*:

Największe co do wartości naprężenia mogą wystąpić w punktach B lub D, w zależności od kształtu przekroju i proporcji M_{gx} / M_{gy}. W punktach B i D dodają się z tym samym znakiem największe rozciągające (punkt B), bądź ściskające (punkt C) naprężenia wywołane przez obydwie składowe momentu zginającego.

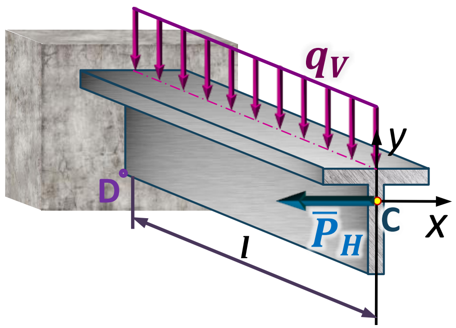
Dla punktu B:
$$\sigma_B = \frac{M_{gx}}{J_x} y_B + \frac{M_{gy}}{J_y} x_B \le k_g \Rightarrow \frac{M_{gx}}{33.33(3)a^4} 2a + \frac{M_{gy}}{10.83(3)a^4} 2.5a \le k_g$$

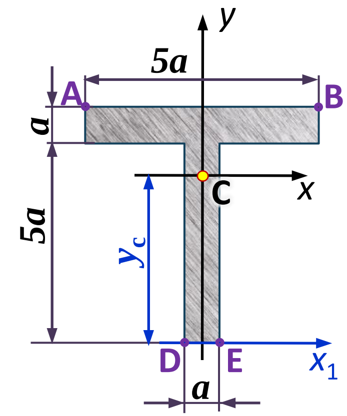
$$\Rightarrow a \ge \sqrt[3]{\frac{0.06 M_{gx} + 0.23077 M_{gy}}{k_g}} \Rightarrow a \ge \sqrt[3]{\frac{0.06 \cdot 1.5 \cdot 10^6 + 0.23077 \cdot 2 \cdot 10^6}{120}}$$

*UWAGA: W przypadku tego przekroju (*teownik*) nie istnieje punkt w którym naprężenia byłyby równe: $\sigma_g = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$. Punkt o współrzędnych $|x_{max}|$, $|y_{max}|$ nie należy do przekroju.

$$a \ge 16.626\ mm$$

Przykład 2.3: Dane: q_v= 3 kN/m, P_H=2 kN, l=1 m, k_g=120 MPa, Szukane: a=?





$$M_{gx} = 1.5\ kNm \qquad M_{gy} = 2\ kNm$$

$$y_C = 4a \quad J_x = 33.33(3)a^4 \quad J_y = 10.83(3)a^4$$

Dla punktu B: $a \geq 16.626\ mm$

4. Warunek bezpieczeństwa – dobór wymiaru przekroju belki:

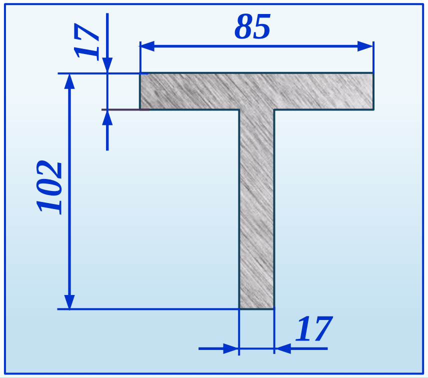
Dla punktu D: $$|\sigma_D| = \frac{M_{gx}}{J_x}|y_D| + \frac{M_{gy}}{J_y}|x_D| \leq k_g \Rightarrow \frac{M_{gx}}{33.33(3)a^4}4a + \frac{M_{gy}}{10.83(3)a^4}0.5a \leq k_g$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{0.12M_{gx} + 0.046154M_{gy}}{k_g}} \Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{0.12 \cdot 1.5 \cdot 10^6 + 0.046154 \cdot 2 \cdot 10^6}{120}}$$

$$a \geq 14.141\ mm$$

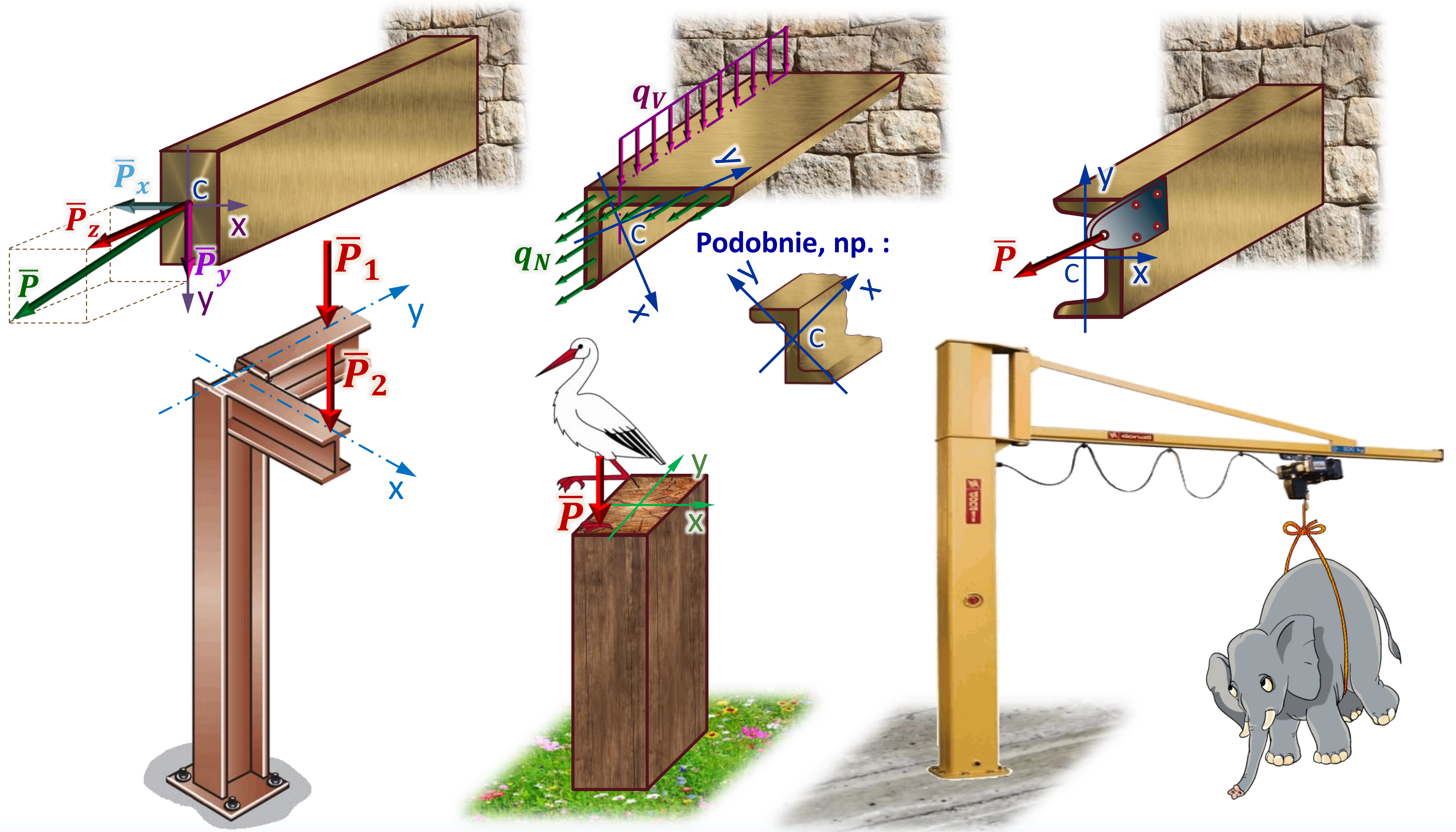
Uwzględniając obliczenia dla punktów B i D można przyjąć: $\boxed{a = 17\ mm}$

Ostateczne wymiary rozważanego przekroju:

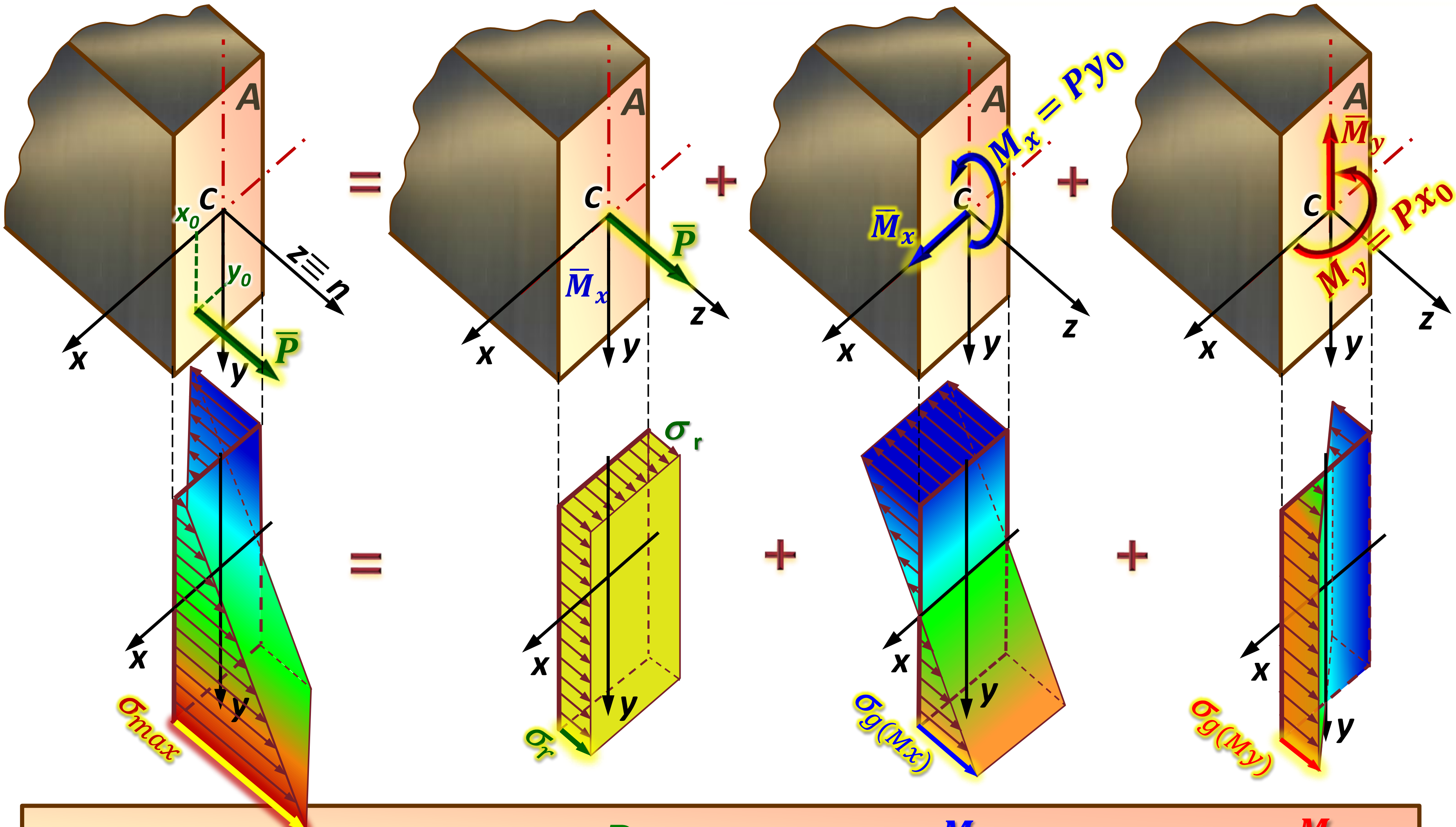


2.11. Zginanie ukośne z rozciąganiem/ściskaniem – studium przypadków

Zginanie skośne z rozciąganie/ściskaniem – kierunek wypadkowego wektora momentu zginającego nie pokrywa się z żadną z głównych osi bezwładności przekroju, a równocześnie działa siła osiowa, np.:



2.12. Zginanie ukośne z rozciąganiem/ściskaniem – naprężenia wypadkowe



$$\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

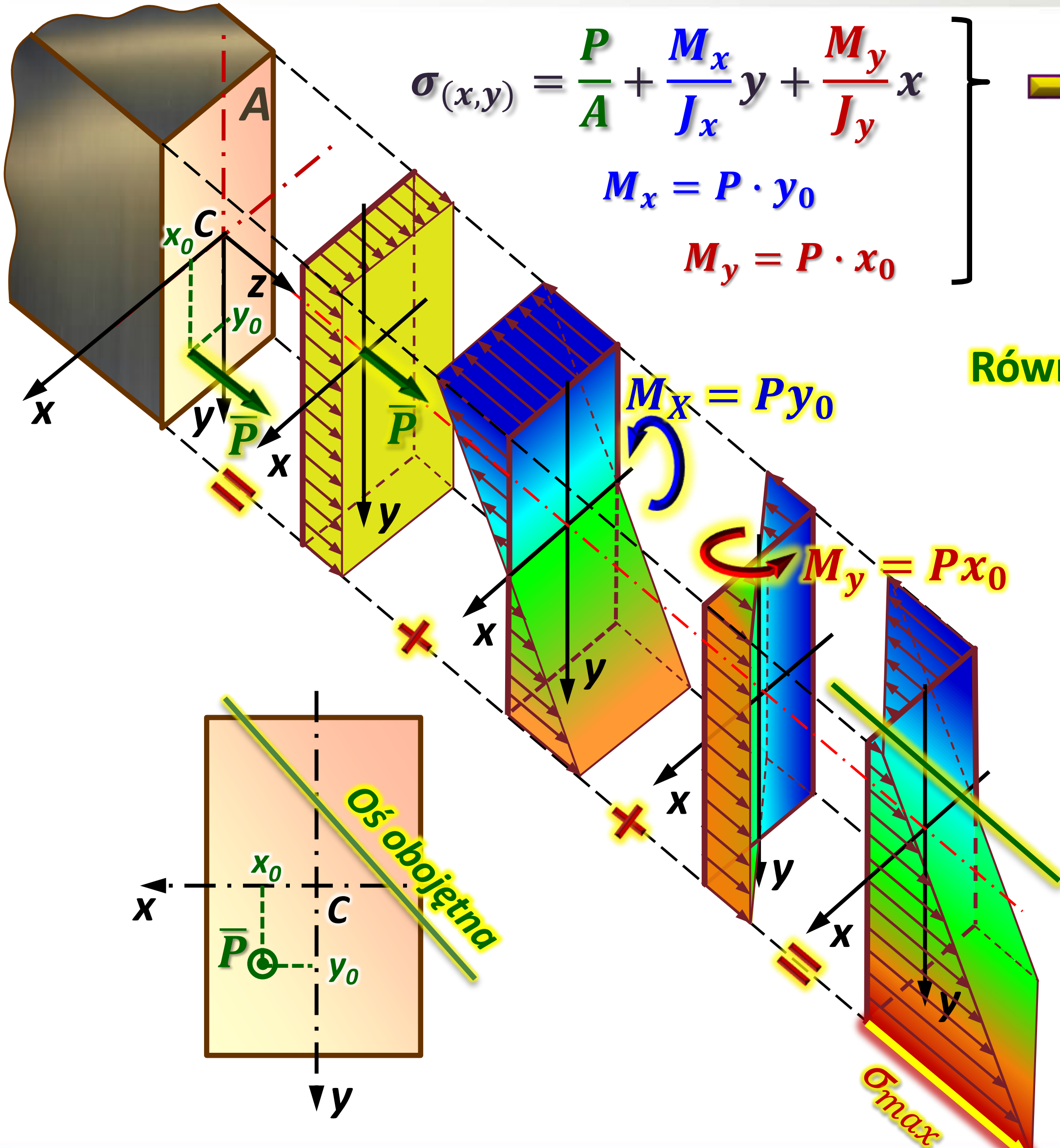
2.13. Zginanie ukośne z rozciąganiem/ściskaniem – równanie osi obojętnej

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

$$M_x = P \cdot y_0$$

$$M_y = P \cdot x_0$$

$$\boxed{\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A} + \frac{P y_0}{J_x} y + \frac{P x_0}{J_y} x}$$



Uwaga: Znaki przy obu członach powyższego równania zależą od przyjętych zwrotów osi układu współrzędnych.

Równanie osi obojętnej:

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A} + \frac{P y_0}{J_x} y + \frac{P x_0}{J_y} x = 0 \quad / \cdot \left(\frac{A}{P}\right)$$

Uwzględniając: $\frac{J_x}{A} = i_x^2 \qquad \frac{J_y}{A} = i_y^2$

$$\boxed{\frac{y_0}{i_x^2} y + \frac{x_0}{i_y^2} x + 1 = 0}$$

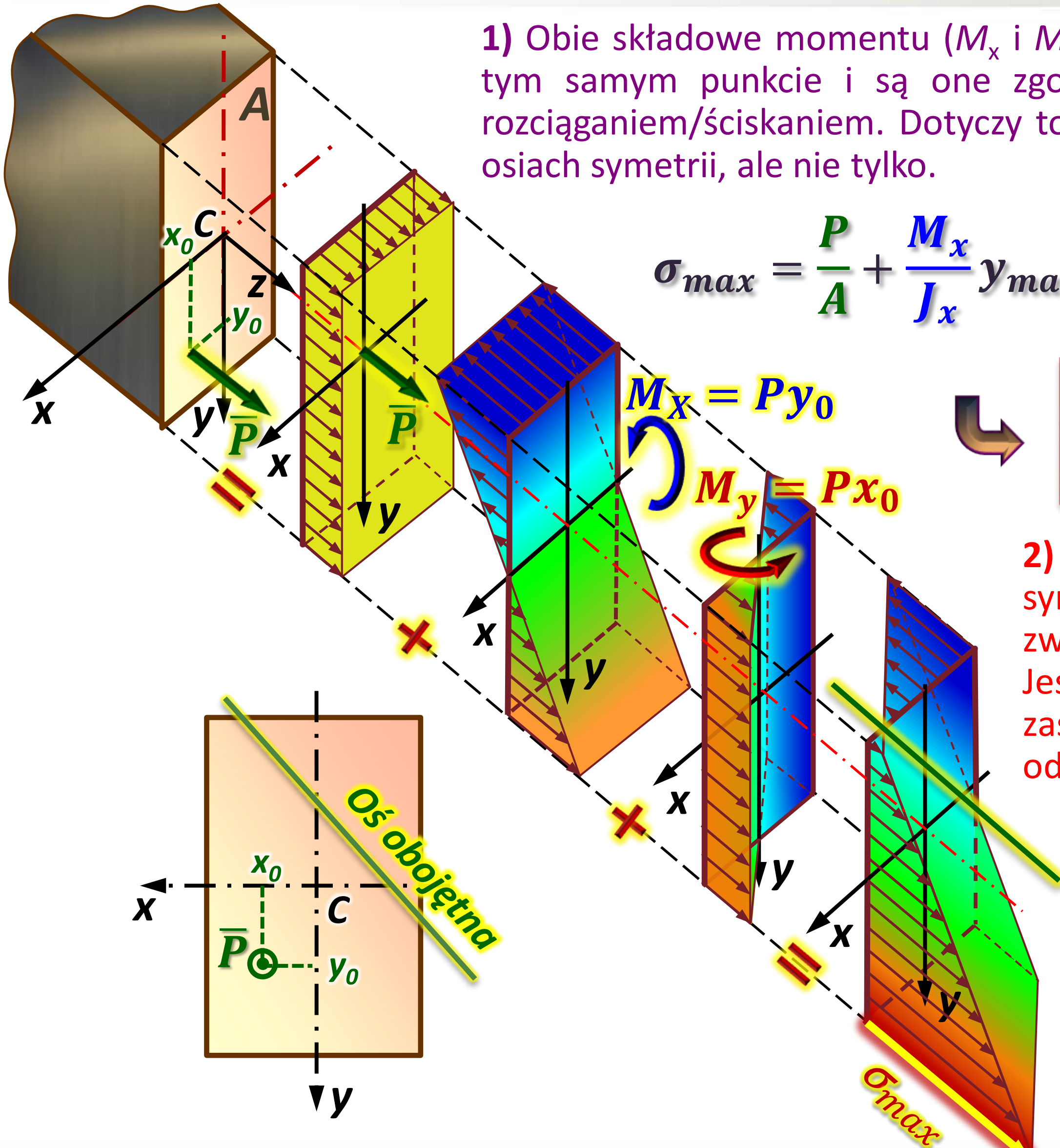
Oś obojętna przy zginaniu ukośnym z rozciąganiem/ściskaniem:

— nie przechodzi przez środek ciężkości figury,

— nie jest równoległa do żadnej z głównych osi bezwładności.

2.14. Zginanie ukośne z rozciąganiem/ściskaniem – warunek bezpieczeństwa

1) Obie składowe momentu (M_x i M_y) powodują powstanie największych naprężeń w tym samym punkcie i są one zgodne co do znaku z naprężeniami wywołanymi rozciąganiem/ściskaniem. Dotyczy to w szczególności wszystkich przekrojów o dwóch osiach symetrii, ale nie tylko.



$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} x_{max}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le k_g \ \ (k_r, k_c)$$

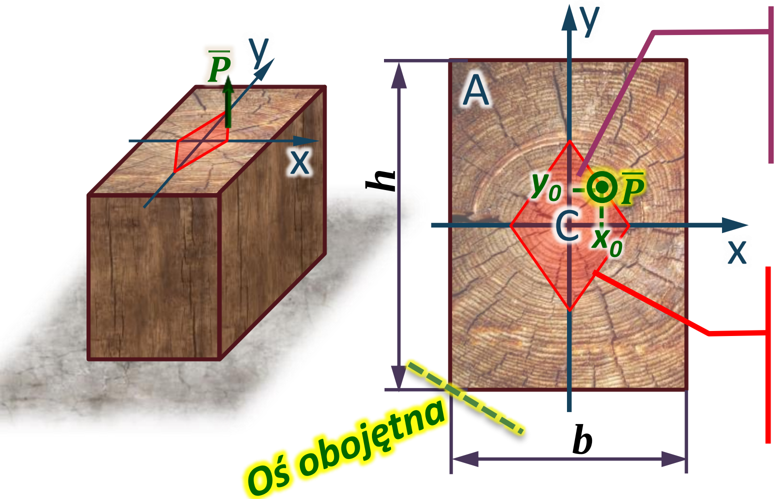
2) Dla przekrojów nieposiadających dwóch osi symetrii powyższy warunek, w zależności od zwrotów obciążeń, może być zachowawczy.
Jeśli kierunek obciążenia jest niezmienny, można zastosować warunek dotyczący punktu najbardziej oddalonego od osi obojętnej:

$$\sigma_{max} = max\left|\sigma_{(x,y)}\right| =$$

$$max\left|\frac{P}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x\right| \le k_g \ \ (k_r, k_c)$$

2.14. Rdzeń przekroju

Rdzeniem przekroju – nazywamy obszar przekroju, w punktach którego przyłożona siła normalna daje w całym przekroju naprężenia jednego znaku (rozciąganie lub ściskanie).



Przyłożona wewnątrz tego obszaru siła normalna (rozciągająca lub ściskająca), spowoduje powstanie w całym przekroju naprężeń tego samego znaku.

Siła normalna przyłożona na konturze rdzenia przekroju wywołuje naprężenia równe zero w jednym (najbardziej oddalonym) punkcie lub wzdłuż jednej linii na krawędzi przekroju (po przeciwnej stronie środka ciężkości).

Rdzeń przekroju obejmuje jego środek ciężkości, a jego kontur tworzy zbiór punktów (x_0, y_0) mających tą cechę, że przyłożona w nich dowolna dodatnia siła normalna spełniała będzie warunek:

$$min\left(\sigma_{(x,y)}\right) = min\left(\frac{P}{A} + \frac{Py_0}{J_x}y + \frac{Px_0}{J_y}x\right) = 0;\ dla\ (x,y) \in A$$

a uwzględniając: $\frac{J_x}{A} = i_x^2$ $\frac{J_y}{A} = i_y^2$

$$min\left(\sigma_{(x,y)}\right) = min\left(\frac{y_0}{i_x^2}y + \frac{x_0}{i_y^2}x + 1\right) = 0;\ dla\ (x,y) \in A$$

Przykład 2.4:

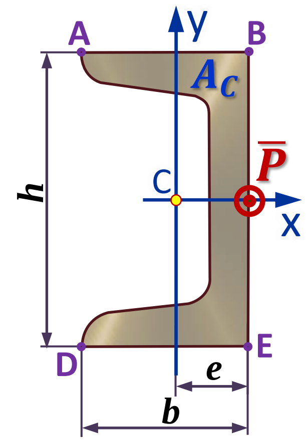
Sprawdzić warunek bezpieczeństwa dla ceownika C100 obciążonego jak na rysunku; wpływ grubości płaskownika, poprzez który działa siła *P*, pominąć.

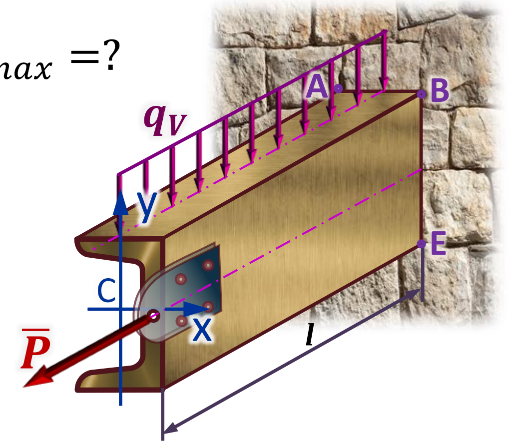
Dane: q_v= 4 kN/m, P_N=40 kN, l=1 m, k_g=120 MPa,

Szukane: $\sigma_{max} = ?$

C100: h=100 mm, b=50 mm, e=15.5 mm, A=13.5 cm^2*,*

J_x=206 cm^4, J_y=29.3 cm^4





1. Momenty w przekroju utwierdzenia:

$$M_{gx} = q_v \frac{l^2}{2} = 4\frac{1^2}{2} = 2\,kNm$$

$$M_{gy} = Pe = 40 \cdot 0.0155 = 0.62\ kNm$$

2. Zależność na naprężenia w przekroju utwierdzenia:

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A_C} + \frac{M_{gx}}{J_x}y + \frac{M_{gy}}{J_y}x$$

Największe co do bezwzględnej wartości naprężenia mogą powstać:

1) w punkcie B – gdzie do naprężeń rozciągających związanych z działaniem siły P dodają się największe dodatnie wartości naprężeń wywołane momentem M_{gx} i M_{gy}.

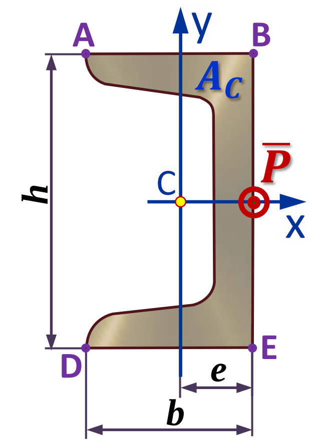
2) w punkcie D – gdzie naprężenia pochodzące od obu momentów są ujemne i posiadają największe wartości bezwzględne.

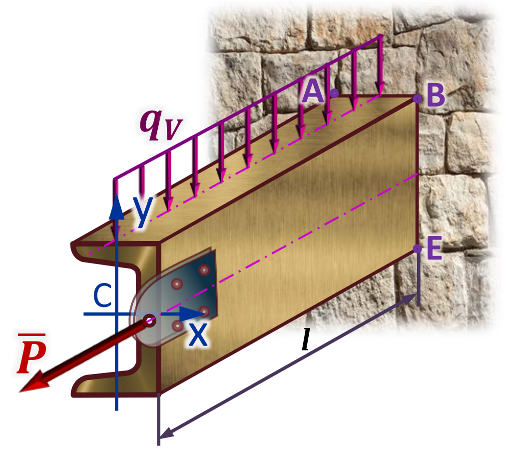
Przykład 2.4: Dane: q_v= 4 kN/m, P_N=40 kN, l=1 m, k_g=120 MPa, *h=100 mm, b=50 mm, e=15.5 mm, A=13.5 cm², J_x=206 cm⁴, J_y=29.3 cm⁴*

Szukane: σ_{max} =?

$M_{gx} = 2\,kNm \quad M_{gy} = 0.62\ kNm$

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{P}{A_C} + \frac{M_{gx}}{J_x} y + \frac{M_{gy}}{J_y} x$$





3. Warunki bezpieczeństwa w krytycznych punktach:

$$\sigma_B = \sigma_{(x=e,\, y=\frac{h}{2})} = \frac{40000}{1350} + \frac{2\cdot 10^6}{206\cdot 10^4}\cdot\frac{100}{2} + \frac{0.62\cdot 10^6}{29.3\cdot 10^4}\cdot 15.5 = 110.97\ MPa < k_g$$

$$\sigma_D = \sigma_{(x=e-b,\, y=-\frac{h}{2})} = \frac{40000}{1350} + \frac{2\cdot 10^6}{206\cdot 10^4}\left(-\frac{100}{2}\right) + \frac{0.62\cdot 10^6}{29.3\cdot 10^4}(15.5-50)$$

$\sigma_D = -91.92\ MPa \;\Rightarrow\; |\sigma_D| = 91.92\ MPa < k_g$

Warunki bezpieczeństwa są spełnione.